第 3 回 波動と光 演習問題 [解答]

[問 1] 次の関数は偶関数か奇関数か．図，数式，もしくは理由を交えて解答せよ．

（1）$e^{-|t|}$

（2）t^2+1

（3）$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$

（4）$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$

[解答]

（1）通常，e^{-t} は減衰関数であるが，t に絶対値があるため，y 軸に対象な偶関数となる．

（2）$t=0$ で 1 となり，y 軸で左右対称となる 2 次関数で表される偶関数である．

（3）$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos 2t$ となり，偶関数である．

（4）$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos t$ となり，偶関数である．

[問 2] 周期 T（$2\pi/\omega$）の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t)=\begin{cases} -\frac{\pi}{4} & (-\frac{T}{2}<x\leq 0) \\ \frac{\pi}{4} & (0<x\leq\frac{T}{2}) \end{cases}$$

で定義されるとき，この $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ．

[解答]

関数 $f(t)$ は奇関数で，この関数の平均は 0 であるから，フーリエ級数展開の公式より，

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega t$$

これより，b_n を求めれば良いことになるので，

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cdot\sin n\omega t\ dt=\frac{2}{T}\Big(\int_{-T/2}^{0}-\frac{\pi}{4}\sin n\omega t\ dt+\int_{0}^{T/2}\frac{\pi}{4}\sin n\omega t\ dt\Big) \\ &= \frac{2}{n\omega T}\Big([\cos n\omega t]_{-T/2}^{0}-[\cos n\omega t]_{0}^{T/2}\Big)=\frac{1}{2n}(1-\cos n\pi)\begin{cases} 1/n & (n\text{ が奇数}) \\ 0 & (n\text{ が偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

よって，$f(t)$ は，以下の式で表される．

$$f(t)=\sum_{n=1,3,5,7...}\frac{1}{n}\sin n\omega t=\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\frac{1}{7}\sin 7\omega t+...$$

[問 3] 1 周期が次の式で表される周期関数 $g(t)$ をフーリエ級数展開せよ．

$$g(t) = \frac{2At}{T}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

但し，部分積分の公式：$\int f \cdot g' \; dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \; dx$ と，$[t \cdot \cos n\omega t]_0^{T/2} = \frac{T}{2} \cdot (-1)^n$

の関係式を用いて良い．

[**解答**]

関数 $g(t)$ は奇関数で，この関数の平均は 0 であるから，フーリエ級数展開の公式より，

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

これより，b_n を求めれば良いことになるので，

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{2At}{T} \cdot \sin n\omega t \; dt = \frac{4A}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} t \sin n\omega t \; dt = \frac{8A}{T^2}\int_0^{T/2} t \sin n\omega t \; dt \\
&= \frac{8A}{T^2}\int_0^{T/2} t \cdot \left(-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\right)' \; dt \\
&= \frac{8A}{T^2}\Big[-\frac{1}{n\omega}[t \cdot \cos n\omega t]_0^{T/2} - \int_0^{T/2} 1 \cdot \left(-\frac{1}{n\omega}\right)\cos n\omega t \; dt\Big] \\
&= \frac{8A}{T^2}\Big[-\frac{1}{n\omega} \cdot \frac{T}{2} \cdot (-1)^n + \frac{1}{n\omega}[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t]_0^{T/2}\Big] \\
&= \frac{2A}{n\pi} \cdot (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

よって，$g(t)$ は，以下の式で表される．

$$g(t) = \frac{2A}{\pi}\Big(\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi t}{T} + \frac{1}{3}\sin\frac{6\pi t}{T} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{2n\pi t}{T} + ...\Big)$$

（教科書 p.43，第 1 章の演習問題 7 の問題.）