

第 2 回 波動と光 演習問題 [解答]

[問 1] 単振動の運動エネルギーと位置エネルギーの 1 周期にわたる平均値が等しいことを示せ.

[解答]

質量 m の物体の変位が $x(t) = a \sin \omega t$ で与えられる単振動をしているとすると、運動エネルギー $W_1(t)$ 、および、その 1 周期の平均値 $\overline{W_1}(t)$ は、

$$W_1 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \cos^2 \omega t, \quad \overline{W_1} = \frac{1}{T} \int_0^T W_1(t) dt = \frac{1}{2T} m \omega^2 a^2 \int_0^T \cos^2 \omega t = \frac{m \omega^2 a^2}{4}$$

位置エネルギー $W_2(t)$ 、および、その 1 周期の平均値 $\overline{W_2}(t)$ は、

$$W_2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sin^2 \omega t, \quad \overline{W_2} = \frac{1}{T} \int_0^T W_2(t) dt = \frac{m \omega^2 a^2}{4}$$

よって、運動エネルギーと位置エネルギーの平均値は等しくなる。

[問 2] x の正の向きに進む平面波 $u_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$ は 1 次元波動方程式を満たすことを示せ. また、 $u_2(x, t) = b \cos(kx - \omega t)$ とするとき、 $u = u_1 + u_2$ も同じ波動方程式を満たすことを示せ.

[解答]

u_1 の時間についての 2 階微分、および、位置についての 2 階微分は、

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -a \omega^2 \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 u_1, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -a k^2 \sin(kx - \omega t) = -k^2 u_1$$

であるから、 $c = \omega/k$ として、 u_1 が 1 次元波動方程式を満たす。同様に、 u_2 に関しても、

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -b \omega^2 \cos(kx - \omega t) = -\omega^2 u_2, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -b k^2 \cos(kx - \omega t) = -k^2 u_2$$

であるから、 $c = \omega/k$ として、 u_2 が 1 次元波動方程式を満たす。2 つの平面波解は同じ速度 $c = \omega/k$ を持つ。上式のそれぞれの和をとれば、

$$\frac{\partial^2 (u_1 + u_2)}{\partial t^2} = -\omega^2 (u_1 + u_2), \quad \frac{\partial^2 (u_1 + u_2)}{\partial x^2} = -k^2 (u_1 + u_2)$$

両者の和 $u_1 + u_2$ も同じ 1 次元の波動方程式になっている。

[問3] 長さ $L = 0.30 \text{ m}$, 断面積 $S = 0.10 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ の鋼鉄製の弦があり, 両端が固定されている. 鋼鉄の密度を $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, ヤング率を $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ とする. この弦の横振動の基本振動数が $f_1 = 440 \text{ Hz}$ であるとき, 弦の張力 T はいくらか. また, この弦の縦振動の基本振動数 f_2 を求めよ. 但し, 基本振動数は $c/2L$ で表され, c は弦を伝わる波動の速度を示す. また, 弦の線密度は媒質の断面積 $\times$ 密度で求められる.

[解答]

弦の線密度を σ とすると横波の速度 c は, $\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ となる. $f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{S\rho}}$ より, 張力 T は,

$$T = (2Lf_1)^2 S\rho = (2 \times 0.30 \times 440)^2 \times (0.10 \times 10^{-6}) \times (7.8 \times 10^3) = 54 \text{ [N]}$$

となる. また, 縦波の速度 c は, $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ となり,

$$f_2 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{1}{2 \times 0.3} \sqrt{\frac{2.0 \times 10^{11}}{7.8 \times 10^3}} = 8.4 \times 10^3 \text{ [Hz]}$$

となる.