第 3 回 波動と光 演習問題 [解答]

[問 1]　波が自由端で反射して重なり合うとき，変位の空間的変化率は $\partial u/\partial x = 0$ であり，時間的変化率 $\partial u/\partial t$ は反射がない場合の 2 倍であることを示せ．ただし，$x = 0$ を自由端，入射波を $u_i(x,t) = a\sin(kx - \omega t)$ とし，反射は完全に行われるとする．

[解答]（配点 40 点）

$x = 0$ を自由端とする．入射波を $u_i(x,t) = a\sin(kx - \omega t)$ とすると，$x = 0$ で反射された波は，$u_r(x,t) = -a\sin(kx + \omega t)$ と表せる．したがって，両者を重ね合わせた波は，

$$u(x,t) = u_i(x,t) + u_r(x,t) = -2a\sin\omega t\cos kx$$

となる．$x = 0$ における変位の空間的変化率は，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \Big[2ak\sin\omega t\sin kx\Big]_{x=0} = 0$$

すなわち，時間に依存せず，常に 0 である．一方，時間的変化率は，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0} = \Big[-2a\omega\cos\omega t\cos kx\Big]_{x=0} = -2a\omega\cos\omega t$$

であり，これは反射がない場合の時間的変化率

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{x=0} = \Big[-a\omega\cos(kx - \omega t)\Big]_{x=0} = -a\omega\cos\omega t$$

の 2 倍になっている．

[問 2]　x 軸上を正の向きに速さ v で進む以下の正弦波について，問いに答えよ．

$$y_i = A\sin\Big[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\Big] \quad (A, \lambda\text{は正の定数})$$

ただし，$x = l$ の固定端で反射される反射波 y_{r1} は，$y_{r1} = -f(-x - vt + 2l)$ で表されるとする．

（1）点 $x = l$ $(l > 0)$ にある固定端で反射されるとき，反射波 y_{r1} はどう表されるか．

（2）原点にもう一つ固定端を設けると原点で反射される y_{r1} の反射波 y_{r2} はどう表されるか．

（3）$0 \leq x \leq l$ の領域に定在波をつくるためには，l と λ の間にどのような条件が必要か．

[解答]（配点各 10 点，計 30 点）

（1）$x = l$ の固定端で反射される反射波 y_{r1} は，

$$y_{r1} = -A\sin\Big[\frac{2\pi}{\lambda}(-x - vt + 2l)\Big] = A\sin\Big[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt - 2l)\Big]$$

と求められる．

（2）波動 $y = f(x+vt)$ に対して，原点にある固定端で反射された反射波 y_r は，$y_r = -f(-x+vt)$ と表される．これより y_{r1} の反射波 y_{r2} は，

$$y_{r2} = -A\sin\Big[\frac{2\pi}{\lambda}(-x+vt-2l)\Big] = A\sin\Big[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt+2l)\Big]$$

と求められる．

（3）$0 \le x \le l$ の領域に定在波をつくるためには，この領域で $y_i = y_{r2}$ となる必要がある．その条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}(2l) = 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

である．これを整理すると，定在波ができる条件は，

$$\lambda = \frac{2l}{n} \quad (n \text{ は整数})$$

と求められる．

[**問 3**]　水波の速さは，波長 λ が短いとき（約 1 cm 以下のとき）には，重力よりも表面張力の効果が大きく，その速さ v は

$$v = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}$$

のように近似できる．ここで，T は表面張力，ρ は密度である．この条件の下で，同じ方向に進み，振幅が同じで振動数がわずかに異なる 2 つの水波を合成したとき，その位相速度と群速度の関係を求めよ．

[**解答**]**（配点 40 点）**

位相速度 v は波数 k を用いて，

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}k}$$

と表される．また $\omega = vk$ と $v_g = d\omega/dk$ より，群速度 v_g は，

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk}$$

と表される．これに式（1）を代入することにより，群速度は，

$$v_g = v + k\Big(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\rho k}}\Big) = v + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\rho}k} = \frac{3}{2}v$$

と求められる．これより群速度は位相速度の 3/2 倍になる．