

第 2 回 波動と光 演習問題 [解答]

[問 1] 次の関数は偶関数か奇関数か。図, 数式, もしくは理由を交えて解答せよ。

- (1) $e^{-|t|}$
- (2) $t^2 + 1$
- (3) $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$
- (4) $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

[解答] (配点各 10 点, 計 40 点)

- (1) 通常, e^{-t} は減衰関数であるが, t に絶対値があるため, y 軸に対称な偶関数となる。
- (2) $t = 0$ で 1 となり, y 軸で左右対称となる 2 次関数で表される偶関数である。
- (3) $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos 2t$ となり, 偶関数である。
- (4) $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos t$ となり, 偶関数である。

[問 2] 周期 T ($2\pi/\omega$) の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & (-\frac{T}{2} < x \leq 0) \\ \frac{\pi}{4} & (0 < x \leq \frac{T}{2}) \end{cases}$$

で定義されるとき, この $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ。

[解答] (配点 30 点)

関数 $f(t)$ は奇関数で, この関数の平均は 0 であるから, フーリエ級数展開の公式より,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

これより, b_n を求めれば良いことになるので,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 -\frac{\pi}{4} \sin n\omega t \, dt + \int_0^{T/2} \frac{\pi}{4} \sin n\omega t \, dt \right) \\ &= \frac{2}{n\omega T} ([\cos n\omega t]_{-T/2}^0 - [\cos n\omega t]_0^{T/2}) = \frac{1}{2n} (1 - \cos n\pi) \begin{cases} 1/n & (n \text{ が奇数}) \\ 0 & (n \text{ が偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

よって, $f(t)$ は, 以下の式で表される。

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,7,\dots} \frac{1}{n} \sin n\omega t = \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots$$

[問 3] 1 周期が次の式で表される周期関数 $g(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$g(t) = \frac{2At}{T}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

但し, 部分積分の公式: $\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$ と, $[t \cdot \cos n\omega t]_0^{T/2} = \frac{T}{2} \cdot (-1)^n$

の関係式を用いて良い.

[解答] (配点 30 点)

関数 $g(t)$ は奇関数で, この関数の平均は 0 であるから, フーリエ級数展開の公式より,

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

これより, b_n を求めれば良いことになるので,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2At}{T} \cdot \sin n\omega t \, dt = \frac{4A}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t \sin n\omega t \, dt = \frac{8A}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin n\omega t \, dt \\ &= \frac{8A}{T^2} \int_0^{T/2} t \cdot \left(-\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t\right)' dt \\ &= \frac{8A}{T^2} \left[-\frac{1}{n\omega} [t \cdot \cos n\omega t]_0^{T/2} - \int_0^{T/2} 1 \cdot \left(-\frac{1}{n\omega}\right) \cos n\omega t \, dt \right] \\ &= \frac{8A}{T^2} \left[-\frac{1}{n\omega} \cdot \frac{T}{2} \cdot (-1)^n + \frac{1}{n\omega} \left[\frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \right]_0^{T/2} \right] \\ &= \frac{2A}{n\pi} \cdot (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

よって, $g(t)$ は, 以下の式で表される.

$$g(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi t}{T} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi t}{T} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{2n\pi t}{T} + \dots \right)$$

(教科書 p.43, 第 1 章の演習問題 7 の問題.)